第13讲 概率初步2——概率计算举例

**知识梳理**

**1．一般概率问题**

(1)**直接通过分析计算其概率：**如果一次试验中共有*n*种可能出现的结果，且每种结果出现的可能性都相等，其中事件*A*包含的结果有*k*种，那么*P*(*A*)=．

(2)稍复杂的事件，可以用**线段法、画树状图或列表**的方法．列举出所有等可能的结果，再分析随机事件发生的概率．

①树形图是解决分步或交叉的事件的概率问题时反复运用的方法．要注意的是：树形图从上到下每一条路径就是一种可能的结果，而且每种结果发生的概率都是等可能的．

②表格法一般只适用于两对象交叉试验结果的分析．用表格法可简明、直观地表现较复杂的等可能结果．

③“线段法”只适用于结果不分先后的问题．

④线段法、列表法和画树状图这三种方法，可以帮助我们分析问题，使我们能不重复、不漏地列出所有可能出现的结果．

**2．与几何图形有关的概率问题**

生活中有些等可能试验与长度、面积或体积等有关，相关的概率问题可以通过有关度量计算来解决；还有些概率问题可以利用图形来进行分析和研究，把问题转化为度量计算再解决．

**用面积法求概率：**

用几何图形的面积比来求概率，计算公式为：*P*(*A*)= ．

对于受几何图形的面积影响的随机事件，在一个平面区域内的每个点，事件发生的可能性都是相等的，如果所有可能发生的区域的面积为*S*，所求事件*A*发生的区域面积为*S*'，那么

[特别提醒]这个概率是概率的几何定义，我们称这样的问题为几何概型问题，可以看成是古典概型的推广和拓展，是一种具有无限等可能性质的随机试验，是数形结合思想的重要体现.

**典型解析**

**例1：**小杰和小明玩扑克牌，各出一张牌，谁的牌数字大谁赢，同样大就平．*A*遇2输，遇其他牌(除*A*外)都赢．最后各人手中还剩3张牌．小杰手中有*A*、*J*、3，小明手中有*K*、*J*、2．这时每人任出一张牌，小杰、小明两人谁获胜的机会大？

←规定*J*、*Q*、*K*分别对应数字11、12、13.

解：用下面的树形图展现两人各从3张牌中任选一张的所有可能的结果.

←将小杰的牌与小明的牌相比：*A*比*K*大、3比2大、*J*与*J*平，感觉上小杰获胜的机会更大.正确的结论需要通过分析和概率的计算获得.

Image65

图中“+”表示“小杰赢”(即“小明输”)，“-”表示“小杰输”(即“小明赢”)，“○”表示“平”.

从图中可以看出，两人各从3张牌中任出一张牌，共有9个等可能的结果.

设事件*A*：“小杰赢”；事件*B*：“小明赢”.

事件*A*包含其中的4种结果：

(*A*，*K*)、(*A*，*J*)、(*J*，2)、(3，2)；

事件*B*也包含其中的4种结果：

(*A*，2)、(*J*，*K*)、(3，*K*)、(3，*J*).

所以，

即两人获胜的机会一样大.

**例2：**甲乙丙三个球迷只有一张球票，现通过抓阄来决定谁去看球．为此准备了三张纸片，其中一张画了个圆圈“○”，抓中的人得到球票；另两张纸片空白．抓阄前，甲提出要先抓，他想先抓的人得到球票的机会大．他的想法对吗？

解：假设抓阄的顺序依次是甲、乙、丙.3张纸片中一张画“○”.我们用“○”表示抓中，其余用“白1”、“白2”表示.用树形图展示所有可能的结果如下：

Image66

从图中可以看出，共有6种可能的结果，其中甲、乙、丙抓到画“○”的纸片的结果各有2种，可知概率都是.所以他们得到球票机会一样大.

←抓阄是不放回地取纸片，即甲取一张纸片后，乙在剩下两张中选取一张，丙只好拿最后一张.

Image68**例3：**将圆盘分为圆心角相等的8个扇形，各扇形涂有各种颜色，如图所示．任意转动转盘，停止后指针落在每个扇形内的可能性大小都一样(当指针落在扇形边界时，统计在逆时针方向相邻的扇形内)．求指针分别落在“红色”、“黄色”、“绿色”扇形内的概率．

解：根据扇形所涂的颜色，可把圆心角相等的8个扇形按逆时针方向依次编号为“红1”、“绿1”、“黄1”、“绿2”、“黄2”、“绿3”、“黄3”、“绿4”.并规定，从逆时针方向看，每条边界属于其后的扇形.转盘停止时，指针所在的扇形有8个等可能的结果.

←因每种颜色的扇形的圆心角之和不相等，所以“指针落在红色扇形内”、“指针落在黄色扇形内”和“指针落在绿色扇形内”，不是等可能.

设事件*A*：“指针落在红色区域内”；事件*B*：“指针落在黄色区域内”；事件*C*：“指针落在绿色区域内”.

事件*A*包含其中的1个结果，得*P*(*A*)=.

事件*B*包含其中的3个结果，即指针落在编号为黄1、黄2或黄3的扇形内，所以*P*(*B*)=.

事件*C*包含其中的4个结果，即指针落在编号为绿1、绿2、绿3或绿4的扇形内，所以*P*(*C*)==.

Image69**例4：**如图，转盘*A*等分为三个扇形，号码为①、②、③；转盘*B*分为两个扇形(即半圆)，号码为①、②．甲乙两位同学想这样玩游戏：甲任意转动*A*盘，停止时指针得到一个号码；乙任意转动*B*盘，停止时指针得到一个号码(当指针落在扇形边界时，统计在逆时针方向相邻的扇形内)．如果两号码的积为奇数，那么甲胜；如果两号码的积为偶数，那么乙胜．

判断这个游戏是否公平．如果不公平，请设计一个公平的游戏规则．

Image70解：用树形图展示一次游戏的所有等可能的结果，如图所示.从图中可以看出，共有6个等可能的结果：

(①，①)、(①，②)、(②，①)、(②，②)、(③，①)、(③，②).

设事件*D*：“两号码之积为奇数”；事件*E*：“两号码之积为偶数”.

事件*D*包含其中的2个结果：(①，①)、(③，①)，所以，

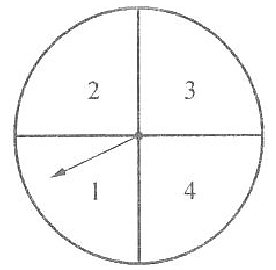
事件*E*包含其余的4个结果，所以，

甲胜的概率比乙胜的概率小，可见这个游戏规则对乙很有利，是不公平的.

为了公平起见，可更改游戏规则.如改为“两号码之和为奇数，甲胜；两号码之和为偶数，乙胜”，其余不变.

这样，两号码之和分别是2、3、3、4、4、5，其中奇数3个，偶数3个.两人获胜的概率都是，可见这个游戏规则是公平的.

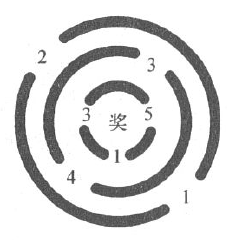
**【变式训练】**

“六一”儿童节前夕，我市某县“关心下一代工作委员会”决定对品学兼优的“留守儿童”进行表彰，某校八年级8个班中只能选两个班级参加这项活动，且8(1)班必须参加，另外再从其他班级中选一个班参加活动．8(5)班有学生建议采用如下的方法：将一个带着指针的圆形转盘分成面积相等的4个扇形，并在每个扇形上分别标上1，2，3，4四个数字，转动转盘两次，将两次指针所指的数字相加(当指针指在某条等分线上时视为无效，重新转动)，和为几就选哪个班参加，你认为这种方法公平吗？请说明理由．

答案：这种方法不公平.

**例5：**某学校七年级数学兴趣小组组织一次数学活动．在一座有三道环形路的数字迷宫的每个进口处都标记着一个数，要求进入者把自己当做数“1”，进入时必须乘进口处的数，并将结果带到下一个进口，依次累乘下去，在通过最后一个进口时，只有乘积是5的倍数，才可以进入迷宫中心，现让一名5岁小朋友小军从最外环任一个进口进入．

(1)小军能进入迷宫中心的概率是多少？请画出树状图进行说明．

(2)小组两位组员小张和小李商量做一个小游戏，以猜测小军进迷宫的结果比胜负．游戏规则规定：小军如果能进入迷宫中心，小张和小李各得1分；小军如果不能进入迷宫中心，则他在最后一个进口处所得乘积是奇数时，小张得3分，所得乘积是偶数时，小李得3分，你认为这个游戏公平吗？如果公平，请说明理由；如果不公平，请在第二道环进口处的两个数中改变其中一个数使游戏公平．

(3)在(2)的游戏规则下，让小军从最外环进口任意进入10次，最终小张和小李的总得分之和不超过28分，请问小军至少几次进入迷宫中心？

**例6：**甲乙两人相约下午1时至2时在某公共汽车站乘车，已知该站在下午1时30分和2时准点各发一班车．假设因堵车的影响，甲乙两人在1时至2时之间任一时刻到达车站的可能性相等，如果两人到车站后见车就上，那么两人同乘一辆车的概率是多少？

←实际上，相对于一个时段内的无数个时刻而言，分界的那个时刻可忽略不计.

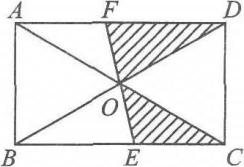
解：将下午1时至2时以1时30分这一时刻为界划为前、后两个时间段，前段从下午1时至1时30分(含此时刻)之间，后段从下午1时30分至2时(含此时刻)之间.

因为甲乙两人在下午1时至2时之间任一时刻到达车站的可能性相等，而前、后两段的时间又一样长，所以相对于前、后两个时间段而言，如果把甲或乙在其中一个时间段内到达车站看作一种情况，那么由这两人到达车站的时刻所确定的结果共有四种，即两人同在前段、两人同在后段、甲在前段乙在后段、乙在前段甲在后段，而且这四种结果是等可能的.

设事件*A*：“甲乙两人同乘一辆车”，可知事件*A*包含“两人同在前段”、“两人同在后段”这两种结果，所以

**【变式训练】**

Image72在例6的基础上，设甲到达车站的时刻为下午1时*x*分，乙到达车站的时刻为下午1时*y*分，其中0<*x*≤60，0<*y*≤60，那么甲乙两人到达车站的时刻可用有序实数对(*x*，*y*)来表示．在直角坐标平面内，画出以(*x*，*y*)为坐标(其中0<*x*≤60，0<*y*≤60)的一切点所在的平面区域，如图所示．这时，对于事件*A*：“甲乙两人同乘一辆车”，怎样在这个平面区域内用适当的方式表示事件*A*发生或不发生？*P*(*A*)能用有关区域的面积比表示出来吗？

**例7：**小明把如图所示的矩形纸板挂在墙上，玩飞镖游戏(每次飞镖均落在纸板上)击中阴影区域的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

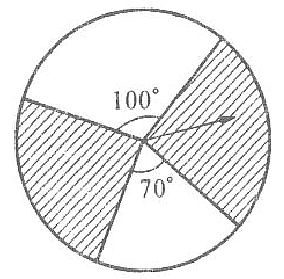
[解析]先求出阴影部分的面积与整个矩形的面积的比值，这个比值也就是所要求的概率.

由矩形的性质知，△*OEC*≌△*OFA*，所以*S*阴影部分=*S*△*OAD*.而，所以玩飞镖游戏击中阴影区域的概率是

[答案]

[点拨]这类题一般是用几何图形的面积比来求概率，计算公式为：*P*(*A*)=.随机事件的概率大小与随机事件所在区域的形状、位置无关.解这类题除了掌握概率的计算方法外，还应熟练掌握几何图形的面积计算.

**例8：**张彬和王华两位同学为得到一张观看足球比赛的入场券，各自设计了一种方案：

张彬：如图，设计了一个可以自由转动的转盘，随意转动转盘，当指针指向阴影区域时，张彬得到入场券；否则，王华得到入场券；

王华：将三个完全相同的小球分别标上数字1、2、3后，放入一个不透明的袋子中，从中随机取出一个小球，然后放回袋子；混合均匀后，再随机取出一个小球．若两次取出的小球上的数字之和为偶数，王华得到入场券；否则，张彬得到入场券．

请你运用所学的概率知识，分析张彬和王华的设计方案对双方是否公平．

答案：张彬和王华的设计方案都不公平.

**同步训练**

**一、填空题**

1．求下列事件的概率：

(1)一个布袋中有5个白球，3个红球，取出一个红球的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，刚才取出的红球不放回，再拿一个球还是红球的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

(2)掷一枚材质均匀的骰子，点数1朝上的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

(3)从1到100这100个连续整数中，任意取一个数，那么这个数能被9整除的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

(4)一副扑克牌(去掉大小王)，任意抽取其中一张，抽到方块的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，抽到*A*的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

(5)在一次问题抢答的游戏中，要求找出对每个问题所列出的6个答案中唯一正确的答案，其抢答者随意说出了一个问题的答案，这个答案恰好是正确答案的概率为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

(6)五张完全相同的卡片上，分别画有圆、正方形、等边三角形、直角梯形、等腰梯形，现从中随机抽取一张，卡片上画的恰好既是中心对称图形又是轴对称图形的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：(1)(2)(3)(4)(5)(6)

2．求下列事件的概率：

(1)布袋里装有2个白球和1个黑球，从中任意取出2个球，那么取到2个球都是白球的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

(2)一人把分别写有“20”、“10”、“世博”的3张相同的卡片字面朝下随意放在桌面上；另一人再把这3张卡片排成一行，从左到右排成“2010世博”或者“世博2010”的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

(3)从2、6、8这三个数字中任选两个组成两位数，在组成的所有两位数中任意抽取一个数，这个数恰好能被4整除的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

(4)同时抛掷两枚材质均匀的硬币，两枚同时正面朝上的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：(1)(2)(3)(4)

3．如图，数轴上两点*A*、*B*，在线段*AB*上任取一点，则点*C*到表示1的点的距离不大于2的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

Image1

Image2答案：

4．如图，掷一枚直径为1个单位长度的硬币，落在4×4单位长度的正方形黑色部分的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

5．现有三位自愿献血者，两人血型为*O*型，一人血型为*A*型，若三人中随意挑选一人献血，两年以后又从此三人中随意挑选一人献血，那么两次所抽血的血型均为*O*型的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

6．在一所有1000名学生的学校中随机调查了100人，其中有85人上学之前吃早餐，在这所学校里随便问一人，上学之前吃过早餐的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：0.85

7．有一根外观完好无损的甘蔗，长1.5米，其实内部已有0.5米遭虫蛀，如果随机地选择一处锯开该甘蔗，所选之处恰好被虫蛀的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

8．冰柜里装有四种饮料：5瓶特种可乐、12瓶普通可乐、9瓶橘子水、6瓶啤酒，其中特种可乐和普通可乐是含有咖啡因的饮料，那么从冰柜里随机取一瓶饮料，该饮料含有咖啡因的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：

**二、选择题**

9．小兰和小谭用掷*A*、*B*两枚六面体骰子的方法来确定*P*(*x*，*y*)的位置，他们规定：小兰掷得的点数为*x*，小谭掷得的点数为*y*，那么他们各掷一次所确定的点数在直线*y*=-2*x*+6上的概率为( )．

答案：B

10．如果小强将镖随意投中如图所示的正方形木板，那么镖落在黑色部分的概率是( )．

Image9

答案：C

**三、解答题**

11．一盘录音带可录80分钟，前面20分钟已录音，现准备再录20分钟，如果随意地从录音带某处开始录，那么能完整录音且与原先的录音不重叠的概率是多少？

答案：

12．飞镖随机地掷向如图所示的靶子上．

(1)在每一个靶子中，飞镖投到区域*A*、*B*、*C*的概率是多少？(2)在靶子1中，飞镖投到区域*A*或*B*中的概率是多少？(3)在靶子2中，飞镖没有投在区域*C*中的概率是多少？

Image8

答案：(1)靶子1： 靶子2(2)(3)

13．如图，在边长为1的正方形*ABCD*中作一内切圆*O*，并向正方形*ABCD*中掷点*M*，设*M*在正方形*ABCD*中均匀分布，试求*M*落在圆*O*中的概率．

Image5

答案：因为*SABCD*=1，*S*圆=*π*所求概率为

**走进中考**

1．(2015·上海中考)某校学生会提倡双休日到养老院参加服务活动，首次活动需要7位同学参加，现有包括小杰在内的50位同学报名，因此学生会将从这50位同学中随机抽取7位，小杰被抽到参加首次活动的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：0.14.

2．(2014·上海中考)如果从初三(1)、(2)、(3)班中随机抽取一个班与初三(4)班进行一场拔河比赛，那么恰好抽到初三(1)班的概率是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案：